Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 05/06
Übung 13 Lösungsskizzen

1.

Beispiel: $18 = 2 \cdot 3^2$

Jeder Teiler von 18 lässt sich als 2-Tupel darstellen. $(\ldots,\ldots)$

Anzahl des Faktors 2

Anz. " " 3

Auf dem 1. Platz hat man 2 Möglichkeiten, nämlich 0 oder 1

auf dem 2. Platz 3 Möglichk., nämlich 0, 1 oder 2

$\Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$ Tupel $= 6$ Teiler $T_{18} = \{1, 18, 2, 9, 3, 6\}$

allgemein: Die PFZ zu a sei $a = \prod_{i=1}^{m} p_i^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{N}_0$

Dann ist jeder Teiler von a durch ein m-Tupel darstellbar. Platz i gibt an, wie oft der Primfaktor p_i gewählt wird. Dafür gibt es $n_i + 1$ Möglichkeit. Also hat a $\prod_{i=1}^{m} (n_i + 1)$ Teiler.

a) "$\Rightarrow$" Ist die Anzahl der Teiler ungerade

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{m} (n_i + 1)$ ist ungerade $\Rightarrow \forall_{i \in \{1,\ldots,m\}}: n_i + 1$ unger.

$\Rightarrow \forall_{i \in \{1,\ldots,m\}}: n_i$ gerade $\Rightarrow \forall_i \exists k_i : n_i = 2k_i$

Dann kann man n schreiben als

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{n_i} = \prod_{i=1}^{m} p_i^{2k_i} = \prod_{i=1}^{m} \left(p_i^{k_i}\right)^2 = \left(\prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}\right)^2$$

„$\Leftarrow$" Die obige Kette wird praktisch umgekehrt durchlaufen. Wenn n Quadratzahl ist, dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $n = r^2$. Hat r die Primfaktorz. $\prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}_0$ dann gilt $n = \left(\prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}\right)^2 = \prod_{i=1}^{m} p_i^{2k_i}$. Also sind alle Exponenten gerade. Dann ist die Anzahl der Teiler $\prod_{i=1}^{m} (2k_i + 1)$ ein Produkt aus ungeraden Zahlen, also selbst ungerade.

b) Erinnerung: $a \in \mathbb{N}$, $a | n \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N} : n = a \cdot b$

$\Rightarrow b | n$ b ist der Komplementärteiler zu a

„$\Rightarrow$" Kontraposition:

n keine Quadratz. $\Rightarrow$ Anz der Teiler von n gerade

n keine Quadratz. $\Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ Jede Zerlegung in Teiler $\cdot$ Komplementärt. liefert 2 verschiedene Teiler für n. $\Rightarrow$ Die Anz. der Teiler ist gerade

„$\Leftarrow$" n ist Quadratzahl $\Rightarrow \sqrt{n} = r \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Die Zerlegung von n in $n = r \cdot r$ liefert nur 1 Teiler. Alle anderen Zerlegungen in Teiler $\cdot$ Komplementärteiler liefern 2 verschiedene Teiler für n $\Rightarrow$ Die Anz. der Teiler von n ist ungerade.

---

2. a) Eine Zahl ist durch $b-1$ teilbar, wenn ihre Quersumme durch $b-1$ teilbar ist.

Die Quersumme von 12331_b ist 10. 10 ist durch 1, 2, 5, 10 teilbar. Also kann (zunächst) $b-1$ gleich 1, 2, 5 oder 10 sein.

$b-1=1 \Rightarrow b=2$ Die Zahl 12331_2 ist unsinnig, denn die Ziffern 2 und 3 sind im Zweiersystem nicht zugelassen.

$b-1=2 \Rightarrow b=3$ (Dann ist $12331_3 = 172$ Das ist durch 2 teilbar.) Die Ziffer 3 ist aber im 3er-System nicht zugelassen

$b-1=5 \Rightarrow b=6$ $12331_6 = 1855$ also durch 5 teilb.

$b-1=10 \Rightarrow b=11$ $12331_{11} = 17700$ also durch 10 teilb.

b) Die Zahl 12331_b ist für keine Basis b durch b teilbar, denn dazu müsste sie auf 0 enden. (Einerziffer gleich 0)

c) Eine Zahl ist durch b+1 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch b+1 teilbar ist.

12331_b hat die alternierende Quersumme $1-2+3-3+1=0$

0 ist durch jede Zahl b+1 teilbar.

$\Rightarrow$ 12331_b ist für jede Basis durch b+1 teilbar

Beispiele: $b=6$ $12331_6 = 1855_{10} = 7 \cdot 265$

$b=10$ $12331_{10} = 11 \cdot 1121$

$b=9$ $12331_9 = 8290_{10} = 10 \cdot 829$

Allgemeiner Beweis:

$12331_b = b^4+2b^3+3b^2+3b+1$. Teilt man dieses Polynom durch b+1 ergibt sich. (Polynomdivision)

$(b^4+2b^3+3b^2+3b+1):(b+1) = b^3+b^2+2b+1$

d.h. die Division geht für alle $b \in \mathbb{N}$ auf.

4

a) Stimmt nicht Gegenbeispiel $a = 9 \quad b = 4$

b) Stimmt nicht 〃 〃

c) Stimmt, wenn $a \neq b$

a prim $\Rightarrow T(a) = \{1, a\}$

b prim $\Rightarrow T(b) = \{1, b\}$

$T(a) \cap T(b) = \{1\}$ wenn $a \neq b$

d) Stimmt nicht Gegenbeispiel $a = 3 \quad b = 6$

$ggT(3, 6) = 3$